23/4/2018

Μαθημα 13ο

Κλασσικη

Ο απλος αρμονικος ταλαντωτης

Θεωρουμε σημειο μαζας m που ικανοποιει το νομο Hooke

▸ Νομος Hooke : $m\ddot{x}+kx=0$ ⇒ ①

ο νομος του Hooke μας λεει οτι $F=-kx$

① ⇒ $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$ ή $\ddot{x}+\omega^2 x=0$, $\omega^2=k/m$

γραμμικη 2ου βαθμου με σταθ. συντ

Η γενικη λυση της δ.ε ειναι $x=x(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$

Τοτε $\dot{x}(t)=-C_1\omega\sin(\omega t)+C_2\omega\cos(\omega t)$

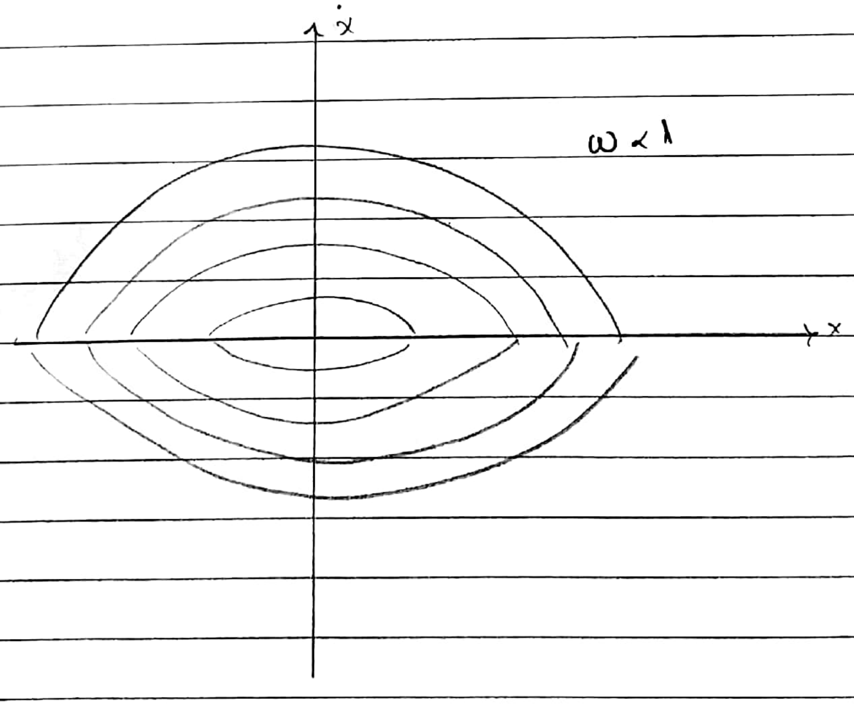
$$\frac{\dot{x}(t)}{\omega}=-C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)$$

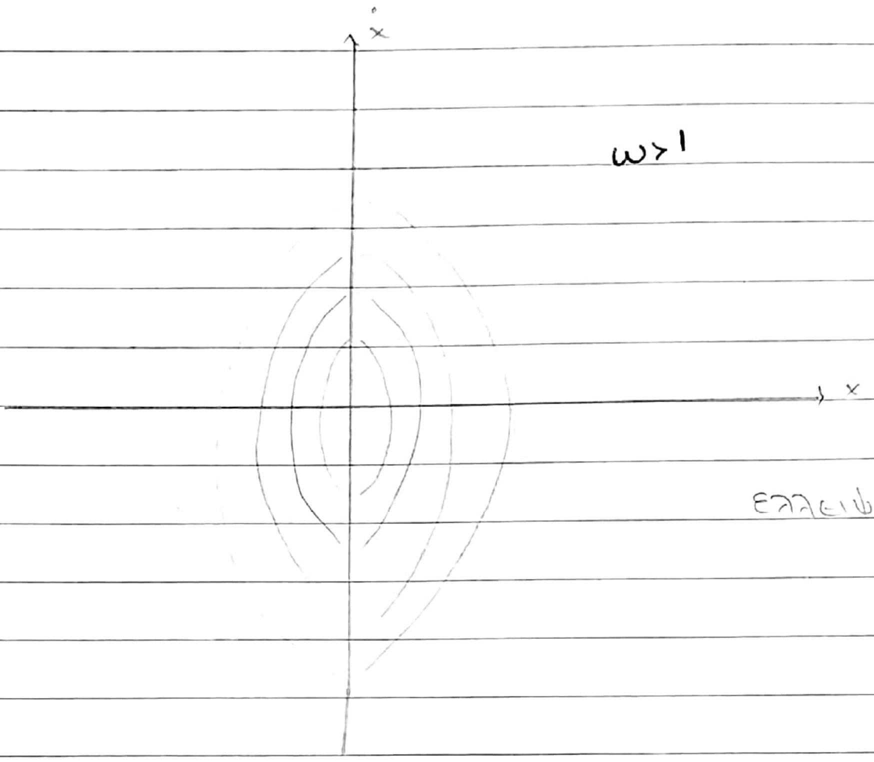
Δηλαδη $$x^2+\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2=C_1^2\cos^2(\omega t)+C_2^2\sin^2(\omega t)+\cancel{2C_1C_2\cos(\omega t)\sin(\omega t)}+$$

$$+C_1^2\sin^2(\omega t)+C_2^2\cos^2(\omega t)-\cancel{2C_1C_2\cos(\omega t)\sin(\omega t)}=C_1^2+C_2^2=C^2$$

⟺ $$\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2+x^2=C^2$$

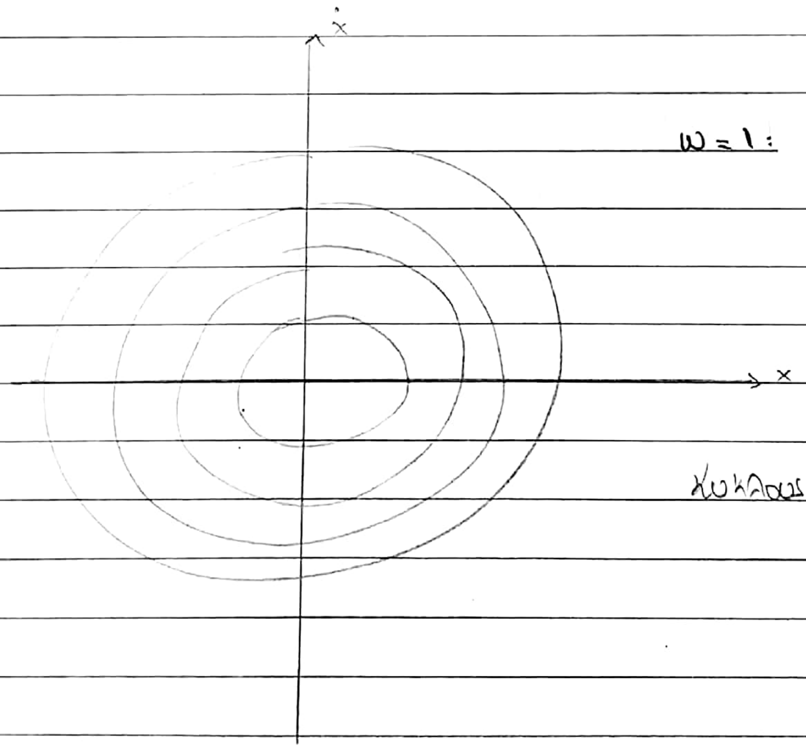
Ο χωρος των φασεων που αντιστοιχει σε αρμονικη κινηση δηλ σε απλη ταλαντωση ειναι κλειστες καμπυλες, ελλειψεις





$\omega > 1$

ελλείψεις



$\omega = 1$:

κύκλους

Η εξισωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ισχυει

Πολ/ζω με $\dot{x}$ και ολοκληρωνω

$$\int (\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\,\omega^2 x)\,dt = C \Rightarrow \int \dot{x}\ddot{x}\,dt + \omega^2 \int x\dot{x}\,dt = C \Rightarrow$$

$$\frac{(\dot{x})^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} = C \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + x^2 = \frac{2C}{\omega^2} = c^2}$$

(Ειναι η εξισωση που ειχα και πριν)

οι καμπυλες αυτες περιγραφουν την περιοδικη κινηση

- Η απλη αρμονικη κινηση περιγραφεται απο κλειστες τροχιες γυρω απο ενα κεντρο ισορροπιας.

Συνοδευω τη διαφορικη εξισωση με αρχικες συνθηκες

Θεωρω $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ Τοτε

$$\left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right)^2 + (x(0))^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2$$

Τελικα $$\boxed{\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + x^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2}$$

Η ποσοτητα αυτη ειναι παντα σταθερη για οποιο χρονο και να αναζητησω

- Η εξισωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ γραφεται ως συστημα εξισωσεων 1ου βαθμου, θετω $y = \dot{x}$ και τοτε

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Το ζητουμενο $\dot{x} = \dot{x}(x)$ ($\dot{x}$ σαν συναρτηση του x)

$y = y(x) \rightarrow$ αυτο ζητω

♡♡♡

only Maths

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot y}{\dot x} = -\omega^2 \frac{x}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\omega^2}\, y\, dy + x\, dx = 0 \rightarrow \boxed{\frac{y^2}{\omega^2} + x^2 = C^2}$$

Αυτονομες Εξισωσεις

▲ Ορισμος

Αυτονομη εξισωση ή συστημα ειναι η εξισωση στην οποια η ανεξαρτητη μεταβλητη δεν εμφανιζεται σε κανεναν ορο της

π.χ

Η εξισωση $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ ειναι αυτονομη ενω η εξισωση $\ddot{x}+\omega^2 x = f_0 \cos(\omega_0 t)$ ειναι μη-αυτονομη

▲ Εμεις εστιαζουμε στις εξισωσεις του τυπου:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

το βαζω για να θυμαμαι οτι η ανεξ. μεταβλητη ειναι ο χρονος και δε θα εμφανιζεται κάπου

Των οποιων μια σημαντικη λυση ειναι η λυση ισορροπιας για την οποια $f(x,0,t)=0$ δηλ $\ddot{x} = \dot{x} = 0$

Τετοιου ειδους λυσεις εμφανιζονται μονο σε αυτονομα συστηματα.

Πλεον συζηταμε για εξισωσεις της μορφης

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (t \text{ ανεξαρτητη μεταβλητη})$$

με θεση ισορροπιας $\dot{x} = \ddot{x} = 0 \iff f(x,0)=0$

παραδειγμα 1

Η εξισωση $\ddot{x} = (1-x^2) + x\dot{x}$ ειναι αυτονομη και τα σταθερα σημεια ειναι οι λυσεις της $(1-x^2) = 0$ $[\ddot{x} = \dot{x} = 0]$

Δηλαδη $x=1$ και $x=-1$

Γραφω την εξισωση σε μορφη συστηματος

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = (1-x^2) + xy \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1-x^2)+xy}{y} \Rightarrow$$

παραδειγμα 2

Η εξισωση $\ddot{x} + a\sin x = 0$ με τον ιδιο τροπο γραφω την εξισωση ως συστημα

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = -a\sin x \end{cases}$$

Σταθερα σημεια ειναι αυτα για τα οποια ισχυει

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ μπορει να εχω παραπανω απο ενα σταθερα σημεια

Το διαγραμμα φασης ειναι

$$\frac{y^2}{2} - a\cos x = C$$

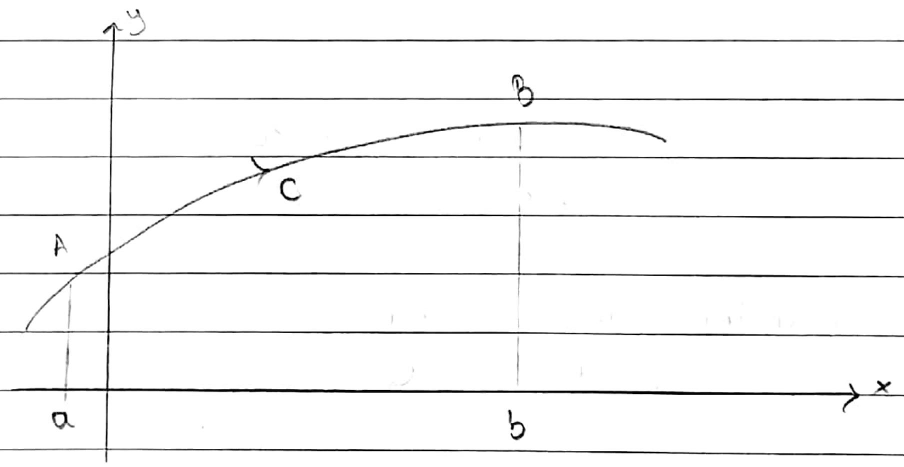
Παρατηρησεις

1. Τα σημεια ισορροπιας της εξισωσης βρισκονται παντα στον οριζοντιο αξονα
2. Κλειστες καμπυλες στο διαγραμμα φασης αντιστοιχουν σε περιοδικες λυσεις
3. Τα σημεια ισορροπιας που περιβαλλονται απο κλειστες καμπυλες στο χωρο των φασεων καλουνται ευσταθη

Χρονος μεταβασης

Εστω οτι θελω να μεταβω απο το σημειο a στο σημειο b στο φασικο χωρο οπως στο σχημα. Ο χρονος που απαιτειται για αυτην την μεταβαση καλειται χρονος μεταβασης και υπολογιζεται ως εξης

$$T_{AB} = \int dt = \int \frac{\dot{x}}{\dot{x}}\, dt = \int \frac{\dot{x}\,dt}{\dot{x}} = \int \frac{dx}{y}$$



Ασκηση

$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ οπως εκανα πριν αλλα με μειον

Διατηρήσιμα συστήματα

Έχουμε ήδη συνδέσει τη εξίσωση του Νεύτωνα με την διατήρηση της ενέργειας. Προκαλύπτεται λοιπόν δυο ερωτήματα

1. Πως μελετούμε τη κίνηση του σημείου υλικού χρησιμοποιώντας αντίστοιχες ενέργειες! (κινητικές)

2. Πως μέσω της δυναμικής ενέργειας μπορώ να μελετήσω τα σημεία ισορροπίας και τη ευσταθείας τους

▸ Θεωρώ τη γενική μορφή της $\frac{1}{2} m(x)\,(\dot{x})^2 + V(x) = E$ ①
όπου πλέον και η μάζα μεταβάλλεται, αν η ενέργεια είναι σταθερή η ποσότητα ① είναι μια σταθερή κίνηση

Από ποιον νόμο προέκυψε αυτή η εξίσωση;
Παραγωγίζω ως προς t την εξίσωση ①

$$\frac{1}{2} m' \dot{x} (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} m \cdot 2 \dot{x} \ddot{x} + V' \dot{x} = 0$$

$$m' = \frac{dm}{dx} \quad , \quad V' = \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{1}{2} m' (\dot{x})^2 + m \ddot{x} + V'(x) = 0$$

Θέτω $u = \int \sqrt{m(x)}\, dx \quad , \quad \frac{du}{dx} = \sqrt{m(x)}$

$$\ddot{u} \sqrt{m} + V'(x) = 0 \Rightarrow \ddot{u} + \frac{V'(x)}{\sqrt{m(x)}} = 0 \Rightarrow \ddot{u} = -V'(u)$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt{m(x)} \cdot V'(u)$$

Με την ίδια αλλαγή μεταβλητής αυτό που καταλήγω είναι $F(u) = \boxed{-V'(u) = \ddot{u}}$

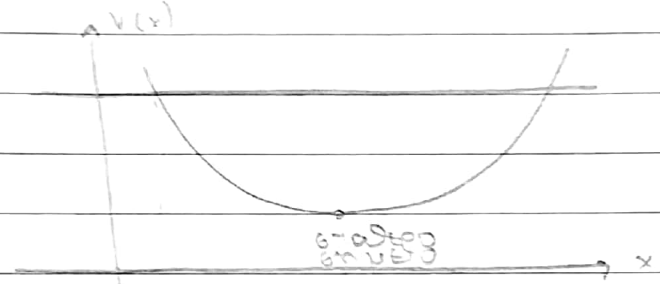
Δηλαδή είναι αντίστοιχος νόμος του Νεύτωνα της μορφής:

$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

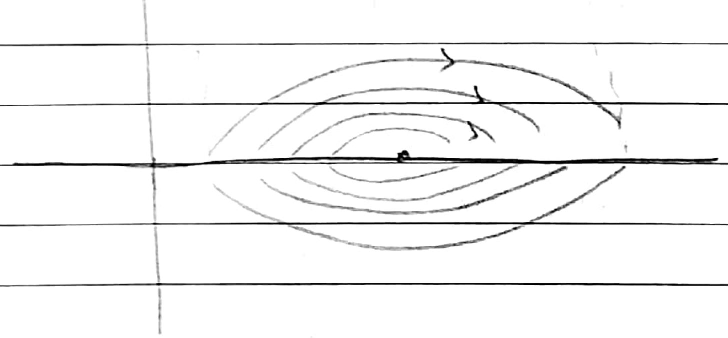
Συνδέουμε λοιπόν το χώρο των φάσεων με το δυναμικό από το νόμο του Νεύτωνα και τη διατήρηση της ενέργειας. Έχω βρει ότι

$$\frac{1}{2} m (\dot{x})^2 + V(x) = E$$

α)

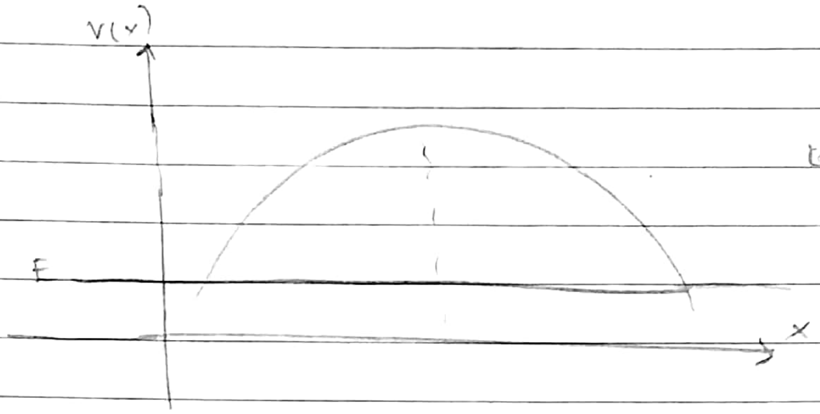


Ευσταθές σημείο ισορροπίας (ταλάντωση)



Μέγιστο

b)



Ανοιχτές τροχιές, ασταθή σ.ι

ούτε max
ούτε min

c)